D-MATH
Dr. Menny Akka Ginosar
Paula Truöl

Lineare Algebra I

HS 2020
ETH Zürich

Lösungen zu Serie 6

Vektorräume, Untervektorräume, Span, Linearkombinationen

Hinweis: Punkte können Sie in den Aufgaben 1(c), 3(a), 5(d) und 6(b) bekommen. Wir erwarten, dass Sie nicht nur diese Aufgaben bearbeiten, sondern versuchen, die ganze Serie zu lösen.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. In dieser Aufgabe sollen Sie unter anderem Teile von Lemma 2.2 beweisen.

   (a) Beweisen Sie, dass der Nullvektor, also das Element $0_V \in V$ aus (V2) mit der Eigenschaft

   $$0_V + v = v \quad \forall v \in V$$

   eindeutig ist.

   Lösung:
   Die Vektorraumaxiome (V1)-(V4) implizieren, dass $(V, 0_V, +)$ mit der Addition als Verknüpfung und dem neutralen Element 0_V eine abelsche Gruppe ist. Also ist das neutrale Element nach Proposition 1.2 aus dem Skript eindeutig.

   (b) Sei $v \in V$. Beweisen Sie, dass das additiv Inverse in (V3), also das Element $w \in V$ mit der Eigenschaft

   $$v + w = 0_V$$

   eindeutig ist.

   Lösung:
   Die Vektorraumaxiome (V1)-(V4) implizieren, dass $(V, 0_V, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Also sind die inversen Elemente nach Proposition 1.2 eindeutig bestimmt.

   (c) Beweisen Sie, dass $-(-v) = v$ für alle $v \in V$ gilt. (2)

   Lösung:
   Sei $v \in V$. Nach Definition gilt $(-v) + (-(-v)) = 0$ und $v + (-v) = 0$. Also sind v und $-(-v)$ beide additiv Inverse von $-v$, wegen der Eindeutigkeit des additiv Inversen (vgl. Teilaufgabe (b)) folgt $-(-v) = v$, also die Behauptung.

   (d) Sei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass es dann ein eindeutiges $x \in V$ mit $v + 3x = w$ gibt.

   Lösung:
   Sei $x = \frac{1}{3}(w - v)$. Dann gilt

   $$v + 3x = v + 3\left(\frac{1}{3}(w - v)\right) = v + (w - v) = v + (-v) + w = 0 + w = w.$$

   Dies zeigt die Existenz. Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe $x' \in V$ mit $v + 3x' = w$. Dann impliziert $v + 3x' = w$ die Gleichung $3x' = w - v$. Analog erhalten wir $3x = w - v$. also gilt $3(x - x') = 3x - 3x' = (w - v) - (w - v) = 0$. Wegen $3 \neq 0$ folgt nun $x - x' = 0$ aus Lemma 2.2 (g), also $x = x'$.

   (e) Die leere Menge ist kein Vektorraum. Sie erfüllt nur genau eines der Vektorraumaxiome (V1)-(V8) in Definition 2.1 aus dem Skript nicht. Welches?

Lösung:
Das Axiom

$$(V2) \qquad \exists 0 = 0_V \in V \, \forall v \in V : 0 + v = v \qquad \text{(Neutrales Element der Addition)}$$

ist nicht erfüllt. Dieses Axiom impliziert, dass ein Vektorraum nicht leer sein kann.

(f) Zeigen Sie, dass man (V3) in Definition 2.1 ersetzen könnte durch

$$(V3') \qquad \forall v \in V : 0_K \cdot v = 0_V.$$

Lösung:
In Teil (c) in Lemma 2.2 haben wir schon gesehen, dass $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$ aus den Vektorraumaxiomen folgt. Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$ und die Vektorraumaxiome (V1), (V2), (V4)-(V8) gelten und zeigen, dass dann (V3) gilt. Wegen $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$ gilt

$$v + ((-1)v) = 1 \cdot v + ((-1) \cdot v) = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0,$$

wobei die erste Gleichheit aus (V6), die zweite aus (V8) und die letzte aus der Annahme folgt. Die vorletzte Gleichung gilt, weil -1 das additiv Inverse zu 1 in K bezeichnet, also $1 + (-1) = 0$ in K gilt. Wir haben gezeigt, dass für alle $v \in V$ das Element $(-1)v$ das additiv Inverse zu v, d.h. (V3) ist erfüllt.

2. Sei X eine Menge. In dieser Aufgabe möchten wir eine Vektorraum-Struktur auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ definieren. Nehmen Sie sich ein bisschen Zeit, selbst zu überlegen, was die Addition und der Nullvektor sein könnten. Aus den Vektorraumaxiomen und Lemma 2.2 wird Ihnen dann vielleicht auch klar, wie die Skalarmultiplikation definiert sein muss.
Wir helfen Ihnen bei der Addition: Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ist deren *symmetrische Differenz* definiert als

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{P}(X).$$

(a) Zeigen Sie $A \Delta B = B \Delta A$ und $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.
Lösung:
Die Lösung zu dieser Teilaufgabe finden Sie in der Datei Serie6-Aufgaben-2a-7bc-9-Lösungen.pdf.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ zusammen mit der symmetrischen Differenz als Addition und $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ als neutralem Element eine abelsche Gruppe ist.
Lösung:
Es gilt $\emptyset \Delta A = (\emptyset \cup A) \setminus (\emptyset \cap A) = A \setminus \emptyset = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$, also ist die leere Menge das neutrale Element bezüglich der Addition. Die Assoziativität und Kommutativität haben wir schon in Teilaufgabe (a) gezeigt. Schließlich gilt $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$, also ist A zu sich selbst invers für alle $A \in \mathcal{P}(X)$.

(c) Folgern Sie aus den Vektorraumaxiomen und Lemma 2.2, dass die Skalarmultiplikation durch

$$\cdot : \mathbb{F}_2 \times V \to V, \qquad \begin{aligned} \overline{0} \cdot A &= \emptyset, \\ \overline{1} \cdot A &= A \end{aligned}$$

definiert sein muss. Zeigen Sie, dass mit dieser Skalamultiplikation $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist.
Lösung:
Wenn $\mathcal{P}(X)$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ sein soll, dann muss wegen (V6) für die Skalarmultiplikation $\overline{1} \cdot A = A$ gelten für alle $A \in \mathcal{P}(X)$. Weiter muss wegen Lemma 2.2 (c) (direkte Folgerung aus den

Vektorraum-Axiomen) auch $\overline{0} \cdot A = \emptyset$ gelten für alle $A \in \mathcal{P}(X)$. Tatsächlich ist $\mathcal{P}(X)$ mit dieser Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$, denn es gelten auch die Axiome (V5), (V7) und (V8):

(V5) Seien $a, b \in \mathbb{F}_2, A \in \mathcal{P}(X)$. Falls $a = \overline{0}$ oder $b = \overline{0}$ ist, dann gilt wegen $a \cdot \emptyset = \emptyset$ auch $a \cdot (b \cdot A) = \emptyset$ und damit $a \cdot (b \cdot A) = \emptyset = \overline{0} \cdot A = (a \cdot b) \cdot A$. Sind $a, b \neq \overline{0}$, dann gilt $a \cdot (b \cdot A) = \overline{1} \cdot (\overline{1} \cdot A) = \overline{1} \cdot A = (\overline{1} \cdot \overline{1}) \cdot A$. Also gilt $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$ für alle $a, b \in \mathbb{F}_2, A \in \mathcal{P}(X)$.

(V7) Seien $a \in \mathbb{F}_2, A, B \in \mathcal{P}(X)$. Falls $a = \overline{0}$ ist, gilt $a \cdot (A \Delta B) = \emptyset = \emptyset \Delta \emptyset = (a \cdot A) \, \Delta \, (a \cdot B)$. Falls $a = \overline{1}$ ist, gilt $a \cdot (A \Delta B) = A \Delta B = (a \cdot A) \, \Delta \, (a \cdot B)$, also gilt (V7).

(V8) Seien $a, b \in \mathbb{F}_2, A \in \mathcal{P}(X)$. Angenommen $a + b = \overline{1}$. Dann gilt in jedem der beiden Fälle ($a = \overline{0}, b = \overline{1}$ oder $a = \overline{1}, b = \overline{0}$) wegen der Kommutativität der symmetrischen Differenz

$$(a + b) \cdot A = A = \emptyset \Delta A = \left(\overline{0} \cdot A\right) \Delta \left(\overline{1} \cdot A\right) = (a \cdot A) \, \Delta \, (b \cdot A) \, .$$

Für $a = b = \overline{0}$ gilt $(a + b) \cdot A = \emptyset = \emptyset \Delta \emptyset = (a \cdot A) \, \Delta \, (b \cdot A)$, für $a = b = \overline{1}$ gilt

$$(a + b) \cdot A = \overline{0} \cdot A = \emptyset = A \Delta A = (a \cdot A) \, \Delta \, (b \cdot A) \, ,$$

es gilt also auch (V8).

3. Seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $W \subseteq V$. Dann sind äquivalent: (2)

i. W ist ein Untervektorraum von V.

ii. $W \neq \emptyset$ und für alle $u, v \in W, a \in K$ gilt $u - a \cdot v \in W$.

Lösung:

“⇒”: Ist W ein Untervektorraum, so ist W per Definition nicht leer und es gelten $a \cdot v \in W$, $-v \in W$ sowie $u + v \in W$ für alle $a \in K, u, v \in W$. Also gilt

$$u - a \cdot v = u + (-a \cdot v) \in W \qquad \text{für alle } a \in K, u, v \in W.$$

“⇐”: Nach Annahme ist $W \neq \emptyset$, also gilt $v_0 \in W$ für ein $v_0 \in V$ und damit (UVR1). Weiter gilt dann $0_V = v_0 - v_0 = v_0 - 1 \cdot v_0 \in W$. Wir zeigen noch (UVR2) und (UVR3).

(UVR2) Seien $u, v \in W$ beliebig, dann gilt nach Annahme $u + v = u - (-1) \cdot v \in W$.

(UVR3) Seien $a \in K, v \in W$ beliebig, dann gilt $a \cdot v = -(-a) \cdot v = 0_V - (-a) \cdot v \in W$, da $0_V \in W$.

(b) Seien $W, W' \subseteq V$ Unterräume. Dann ist $W \cup W'$ ein Untervektorraum genau dann, wenn $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$.

Lösung:

“⇒”: Wir zeigen dies durch Kontraposition. Dazu nehmen wir an, dass $W \not\subseteq W'$ und $W' \not\subseteq W$ gelten. Seien $w \in W \setminus W'$ sowie $w' \in W' \setminus W$, also $w, w' \in W \cup W'$. Angenommen $w + w' \in W$, dann ist, weil $W \subseteq V$ ein Untervektorraum ist, auch $-w \in W$ und

$$w' = (w + w') + (-w) \in W,$$

im Widerspruch zur Wahl von w'. Analog argumentiert man, dass auch $w + w' \in W'$ nicht gelten kann. Also ist $w + w' \notin W \cup W'$ und somit ist $W \cup W'$ kein Untervektorraum, denn (UVR2) ist verletzt.

Bemerkung:

Fischer beweist diese Richtung in einer Bemerkung auf S. 79 direkt, vergleichen Sie seinen Beweis mit dem obigen.

"$\Leftarrow$": Sei $W \subseteq W'$, dann ist $W \cup W' = W'$ und somit ein Untervektorraum nach Voraussetzung. Analog argumentiert man, wenn $W' \subseteq W$.

4. Finden Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{F}_2^2$, wobei $\mathbb{F}_2^2$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation versehen ist. Begründen Sie, warum es keine weiteren als die von Ihnen gefundenen Untervektrorräume geben kann.

   Lösung:

   Behauptung: Es sind $\{(\overline{0},\overline{0})\}, \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1})\}, \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0})\}, \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$ und $\mathbb{F}_2^2$ alle möglichen Untervektorräume von $\mathbb{F}_2^2$.

   Beweis: Sei $U \subseteq \mathbb{F}_2^2$ ein Untervektorraum. Wegen (UVR1') (vgl. Uebung 2.6 im Skript) muss

$$0_{\mathbb{F}_2^2} = (\overline{0},\overline{0}) \in U$$

   gelten. Offensichtlich ist $\{(\overline{0},\overline{0})\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^2$ (vgl. Beispiel 2.9). Angenommen, U enthält zwei von $0_{\mathbb{F}_2^2}$ verschiedene Elemente von $\mathbb{F}_2^2$, dann muss wegen (UVR2) aber schon $U = \mathbb{F}_2^2$ gelten. Für $a, b \in \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0_{\mathbb{F}_2^2}\}$ mit $a \neq b$ gilt nämlich $a + b \neq a, b, 0_{\mathbb{F}_2^2}$. Es ist leicht zu sehen, dass die Mengen $\{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1})\}, \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0})\}, \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$ jeweils Untervektorräume von $\mathbb{F}_2^2$ sind, denn für $a \in \mathbb{F}_2^2$ ist $a+a = 0_{\mathbb{F}_2^2}$ und $a+0_{\mathbb{F}_2^2} = a$, also ist (UVR2) jeweils erfüllt, und auch (UVR3) gilt wegen $\overline{0}\cdot a = 0_{\mathbb{F}_2^2}, \overline{1}\cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_2^2$. $\square$

5. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Was passiert, wenn in (c) und (d) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

   Lösung:

   Dies ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   über $\mathbb{R}$ und deshalb ein Untervektorraum (siehe Beispiel 2.15 in der Vorlesung).

   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

   Lösung:

   Die Menge $A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn es gilt $(1,1,0),(0,1,1) \in A$, aber $(1,2,1) = (1,1,0) + (0,1,1) \notin A$. Das Axiom (UVR2) ist also verletzt.

   (c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

   Lösung:

   Die Gleichung $x_1^2 + x_2^4 = 0$ ist in $\mathbb{R}$ nur durch $x_1 = x_2 = 0$ erfüllt. Die Menge ist daher $\{(0,0)\}$ und somit ein Untervektorraum. Für den Körper $\mathbb{F}_2$ sieht es anders aus: Für alle $a \in \mathbb{F}_2$ gilt $a^2 = a$ und daher liest sich die Gleichung über $\mathbb{F}_2$ als $x_1 + x_2 = 0$. Die Menge ist also die Lösungsmenge eines homogenen linearen GLS und damit ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^3$.

   (d) $\{(\mu + a, a^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (2)

   Lösung:

   Die Menge ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, da z.B. $(1,1)$ enthalten ist, das skalare Vielfache

$$(-1)\cdot(1,1) = (-1,-1)$$

jedoch nicht, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist immer nicht-negativ. Das Axiom (UVR3) ist also verletzt.
Über $\mathbb{F}_2$ nutzen wir erneut, dass $a^2 = a$ gilt. Für beliebige $x, y \in \mathbb{F}_2$ setzen wir

$$a = y, \mu = x - y\,.$$

Dann ist $(x, y) = (\mu + a, a) \in \{(\mu + a, a^2) \in \mathbb{F}_2^2 \,|\, \mu, a \in \mathbb{F}_2\}$, also ist die Menge der gesamte Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$, insbesondere ein Untervektorraum.

6. Sei K ein Körper und sei $\mathrm{Abb}(K, K) = K^K$ der Vektorraum über K aller Abbildungen $f\colon K \to K$. Seien

$$\begin{aligned} V_1 :=& \{f \in \mathrm{Abb}(K,K) \mid \forall x \in K : f(-x) = f(x)\} && \text{(gerade Funktionen)},\\ V_2 :=& \{f \in \mathrm{Abb}(K,K) \mid \forall x \in K : f(-x) = -f(x)\} && \text{(ungerade Funktionen)}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $V_1, V_2 \subseteq \mathrm{Abb}(K, K)$ Untervektorräume sind.

Lösung:

Wir schreiben auch $V = \mathrm{Abb}(K, K)$ und bemerken, dass das neutrale Element bezüglich der Addition in V die Abbildung 0_V gegeben durch $0_V(x) = 0 \in K$ für alle $x \in K$ ist. Des Weiteren gilt $0 = -0$ in K und folglich sind $0_V(-x) = 0 = 0_V(x)$ sowie $0_V(-x) = 0 = -0_V(x)$ für alle $x \in K$. Also ist $0_V \in V_1 \cap V_2$. Seien $f_1, g_1 \in V_1$, $f_2, g_2 \in V_2$ und $a \in K$, dann gelten

$$\begin{aligned} (f_1 + g_1)(x) =& f_1(x) + g_1(x)\\ =& f_1(-x) + g_1(-x) = (f_1 + g_1)(-x)\\ (a \cdot f_1)(x) =& af_1(x) = af_1(-x) = (a \cdot f_1)(-x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} -(f_2 + g_2)(x) =& -f_2(x) - g_2(x)\\ =& f_2(-x) + g_2(-x) = (f_2 + g_2)(-x)\\ -(a \cdot f_2)(x) =& -af_2(x) = a\big(-f_2(x)\big) = (a \cdot f_2)(-x). \end{aligned}$$

Somit sind (UVR2) und (UVR3) erfüllt und V_1, V_2 sind Unterräume von V.

(b) Nehmen Sie an, dass $K = \mathbb{R}$ ist und zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eindeutige f_1, f_2 mit $f_i \in V_i, i \in \{1, 2\}$ existieren, sodass $f = f_1 + f_2$ gilt. (2)

Lösung:

Wir zeigen zunächst für alle $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Existenz von f_1, f_2 mit $f_i \in V_i, i \in \{1, 2\}$ und $f = f_1 + f_2$.
Sei $f \in V$ und seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x) :=& \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \quad \forall x \in \mathbb{R},\\ f_2(x) :=& \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = f(x)$$

Des Weiteren gelten für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_1(-x) =& \frac{1}{2}\big(f(-x) + f(\underbrace{-(-x)}_{=x})\big) \\
=& \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = f_1(x) \\
f_2(-x) =& \frac{1}{2}\big(f(-x) - f(\underbrace{-(-x)}_{=x})\big) \\
=& -\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = -f_2(x)
\end{aligned}$$

Letzteres zeigt, dass $f_1 \in V_1$ und $f_2 \in V_2$. Wir haben also die Existenz gezeigt.
Den Beweis zur Eindeutigkeit finden Sie in der Datei Serie6-Aufgaben-2a-7bc-9-Lösungen.pdf.

(c) Sei nun K ein Körper mit Charakteristik $\mathrm{char}(K) = 2$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Abb}(K, K) = V_1 = V_2$ gilt.

Lösung:

Die Lösung zu dieser Teilaufgabe finden Sie in der Datei Serie6-Aufgaben-2a-7bc-9-Lösungen.pdf.

7. Sei $\mathbb{R}^\infty = \{(x_i)_{i\geq 1} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geq 1\}$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ der reellwertigen Folgen. Sei P_1 die Menge aller schliesslich polynomialen Folgen, das heisst, sei

$$P_1 := \big\{(x_i)_{i\geq 1} \in V \;\big|\; \exists N \geq 1,\ \exists \text{ Polynom } P(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ sodass } \forall i \geq N\colon x_i = P(i)\big\},$$

und sei P_2 die Menge aller periodischen Folgen, das heisst, sei

$$P_2 := \big\{(x_i)_{i\geq 1} \in V \;\big|\; \exists m \geq 1 \text{ sodass } \forall i \geq 1\colon x_{i+m} = x_i\big\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass P_1 und P_2 Untervektorräume von V sind.

Lösung:

Wir zeigen dass P_1 ein Untervektorraum ist. Die Menge P_1 enthält die Nullfolge, das heisst die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ mit $x_i = 0$ für alle i; insbesondere ist P_1 nicht leer. Seien weiter $x = (x_i)_{i\geq 1}$ und $y = (y_i)_{i\geq 1}$ zwei beliebige Elemente in P_1 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $N_x \geq 1$ und $N_y \geq 1$ und Polynome $P_x, P_y \in \mathbb{R}[x]$, sodass $x_i = P_x(i)$ ist für alle $i \geq N_x$ und $y_i = P_y(i)$ für alle $i \geq N_y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x_i + y_i &= P_x(i) + P_y(i) && \text{für alle } i \geq \max\{N_x, N_y\} \\
\lambda x_i &= (\lambda P_x)(i) && \text{für alle } i \geq N_x.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $x + y = (x_i + y_i)_{i\geq 1}$ (mit Polynom $P_x + P_y$) und $\lambda x = (\lambda x_i)_{i\geq 1}$ (mit Polynom λP_x) wieder in P_1 liegen. Also ist P_1 ein Untervektorraum.

Wir zeigen nun, dass P_2 ein Untervektorraum ist. Die Nullfolge liegt in P_2, insbesondere ist P_2 nicht leer. Für beliebige Elemente $x = (x_i)_{i\geq 1}$ und $y = (y_i)_{i\geq 1}$ in P_2, wähle $a \geq 1$ und $b \geq 1$, sodass $x_{i+a} = x_i$ und $y_{i+b} = y_i$ ist für alle $i \geq 1$. Durch vollständige Induktion folgt $x_{i+ka} = x_i$ und $y_{i+kb} = y_i$ für alle $i, k \geq 1$. Mit $m := a \cdot b$ gilt deshalb

$$x_{i+m} + y_{i+m} = x_{i+b\cdot a} + y_{i+a\cdot b} = x_i + y_i.$$

Das zeigt, dass die Summe $x + y$ periodische Folgenglieder hat, also in P_2 liegt. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda x_{i+a} = \lambda x_i$ für alle $i \geq 1$, insbesondere also $\lambda x \in P_2$. Wir haben also gezeigt, dass P_2 ein Untervektorraum ist.

8. Wir betrachten den Matrizenraum $V = M_{n\times n}(K)$ für einen Körper K. In der Übungsstunde haben Sie gesehen, dass dies ein Vektorraum über K ist. Wir definieren

$$U_1 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^T = A\},$$
$$U_2 = \{A = (a_{ij}) \in V \mid A^T = -A\},$$

wobei $A^T = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ die *transponierte Matrix* von A bezeichnet. U_1 ist die Teilmenge von V der *symmetrischen* Matrizen, U_2 die Teilmenge der *schiefsymmetrischen* Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_1 ein Untervektorraum von V ist. U_2 ist ebenfalls ein Untervektorraum, dies müssen Sie hier aber nicht zeigen.

Lösung:

Seien $A, B \in U_1, \lambda \in K$.

(UVR1') Für die Nullmatrix $0 = (0_K)$ gilt $0^T = 0$, also $0 \in U_1$ und damit (UVR').

(UVR2) Es gilt $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$ nach Voraussetzung, also $A + B \in U_1$.

(UVR3) Es gilt $(\lambda A)^T = \lambda(A^T) = \lambda A$, also $\lambda A \in U_1$.

(b) Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2) = V$ ist. *Tipp:* Um $V \subseteq \operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2)$ zu zeigen, betrachten Sie für $M \in V$ die Matrix $\frac{1}{2}(M + M^T)$.

Lösung:

Wir zeigen zuerst, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist. Sei $A \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $A = A^T = -A$, also $a_{ij} = -a_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Daraus folgt wegen $\operatorname{char}(K) \neq 2$, dass $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist. Somit gilt $A = 0$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Wegen $U_1 \cup U_2 \subseteq V$ gilt $\operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2) \subseteq V$. Tatsächlich ist $\operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2) \subseteq V$ wegen Lemma 2.36 ein Untervektorraum von V. Es bleibt zu zeigen, dass $V \subseteq \operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2)$. Sei $M \in V$ beliebig und definiere $A := \frac{1}{2}(M + M^T)$ und $B := \frac{1}{2}(M - M^T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2}\left(M + M^T\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^T\right) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M^T + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^T = M, \\ A^T &= \left(\frac{1}{2}(M + M^T)\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \frac{1}{2}\left(M^T + M\right) = A, \text{ also } A \in U_1, \\ B^T &= \left(\frac{1}{2}\left(M - M^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \frac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -\frac{1}{2}\left(M^T + M\right) = -B, \\ &\text{also } B \in U_2. \end{aligned}$$

Somit gilt $M = A + B$ für $A \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2, B \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$, also $M \in \operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2)$ und damit $\operatorname{Sp}(U_1 \cup U_2) = V$.

9. (a) Schreiben Sie den Vektor $(-1, 0, 3, 2) \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 1, 1), \\ v_2 &= (-4, -2, 0, 1), \\ v_3 &= (4, 3, 0, 0), \\ v_4 &= (3, 2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

(b) Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + x^2, \\ p_2(x) &= x^3 - 2x - 4, \\ p_3(x) &= 3x + 4, \\ p_4(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}[x]$. Schreiben Sie das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ als Linearkombination der Polynome p_1, p_2, p_3, p_4.
Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a).

(c) Schreiben Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

als Linearkombination der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Tipp: Verwenden Sie die Teilaufgabe (a).

Lösung:

Die Lösung zu dieser Aufgabe finden Sie in der Datei Serie6-Aufgaben-2a-7bc-9-Lösungen.pdf.

10. Bearbeiten Sie die begleitenden Multiple Choice-Aufgaben unter `https://echo.ethz.ch/`.

Lösung:

Die Lösungen zu den Multiple Choice-Aufgaben werden separat auf der Vorlesungswebsite veröffentlicht.